

Вопрос по основному курсу.

① Операции над матрицами и их св-ва.

$\Rightarrow$ 2 м-цы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$
одн. размера $m \times n$ наз-ся равными, если
 $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$

$$\text{~~A~~ } A = B$$

Сумма м-ц $A + B$ - м-ца C , такая, что
 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $C = A + B$

Th. 1 Операции сложения м-ц обладают св-вами:

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $A + O = O + A = A$

4) $A + (-A) = -A + A = O$

D-во: Докажу св-во 2:

м-цы $\{A + B\} + \{C\}$ и $\{A\} + \{B + C\}$
элемент элементов $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$ и $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$
соотв. они равны $\square$

Для разности м-ц $C = A - B$ те же св-ва
в силе

Th. 2 Умножение м-цы на число обладает св-вами:

1) $1 \cdot A = A$

2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

5) $-A = (-1)A$

D-во: по той же схеме

Умножение м-у:

$$C = AB$$

Th. 3 св-ва умножения м-у.

$$1) (AB)C = A(BC)$$

$$2) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$3) A(B+C) = AB+AC, (A+B)C = AC+BC$$

D-во: Докажем св-во 1.

$$A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}; B = (b_{ij}) \in R^{n \times k}; C = (c_{ij}) \in R^{k \times p}$$

$$AB = U = (u_{ij}); BC = V = (v_{ij}); (AB)C = S = (s_{ij})$$

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^k u_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^k \left(\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rq} \right) c_{qj}$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} v_{rj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \left(\sum_{q=1}^k b_{rq} c_{qj} \right) \Rightarrow$$

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^k \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rq} c_{qj}$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^k a_{ir} b_{rq} c_{qj}; \text{ значит } s_{ij} = t_{ij}$$

Транспонирование м-у:

Th. 2 $A^T, \quad a_{ij}^T = a_{ji}$

Th. 4 св-ва транспонирования м-у

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$3) (AB)^T = B^T A^T$$

$$4) (A^T)^T = A$$

Доказ. $1, 2, 4$ вытекают из определений.
 Допустим $ab \neq ba$ 3:

$$\{(AB)^T\}_{ij} = \{AB\}_{ji} = \sum_{s=1}^n a_{js} b_{si} = \\ = \sum_{s=1}^n b_{si} a_{js} = \{B^T A^T\}_{ij} \quad \blacksquare$$

② Приведение $m \times n$ к ступенчатой/диагональной форме.

Элементарные преобразования $m \times n$.

- 1) перестановка 2х строк (столбцов)
- 2) умножение строки (столбца) на число $\neq 0$
- 3) прибавление к одной строке (столбцу) m -ую строки (столбца), умноженной на число.

Th 1 (об основном процессе)

Любая $m \times n$ (ненулевая) матрица m -ных преобразований может быть приведена к верхней ступенчатой форме.

Доказ. $\exists A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, A \neq O.$

В худшем случае процесс займет $k = \min(m, n)$ шагов

1 шаг а) Т.к. $A \neq O$, то $\exists$ ненулевой элемент.

$\exists k_1$ -номер 1 из $\min$. В нем существует ненулевой элемент a_{1k_1} . Если $a_{1k_1} \neq 0 \Rightarrow \delta$, иначе поменяем местами i и 1 строки, тогда $a_{1k_1} \neq 0$.

б) С помощью a_{1k_1} аннулирую все по i -той k_1 столбца по i чис. Из всех строк со 2 вычитая $a_{2i}/a_{1k_1}, a_{3i}/a_{1k_1}, \dots, a_{mi}/a_{1k_1}$. Все элементы по a_{1k_1} обнулены.

Если все строки стали нулевыми, преобр. закончено, иначе $\Rightarrow$ 2 шаг.

2 мая

Аналогично к 1 мая, только где 2 стр.

Приведение к числ. форме.

Ес. $\square$ А в верхней трапецеобразной форме, тогда

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{O}$$

- искомого результата (или A^*)

Нужно разделить каждую левую сторону трапец. и-го на свой диаг. элемент, затем с помощью 1 столбца аннулировать все и-го строки (кроме диаг), с помощью 2 столбца все и-го строк (кроме диаг), и т.д. 1

③ Перестановки

$a_1, a_2, \dots, a_n$ Опр. 1 Упорядоченная совокупность чисел в которой:

- $$\begin{aligned} 1) & a_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i = \overline{1, n} \\ 2) & a_i = a_j, \text{ nur } i \neq j \end{aligned}$$

2) $a_i = a_j$, при $i \neq j$

наз-ся перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$

Перебивая $1, 2, \dots$ и кажда натуральной

Транспозиция — $a_i \quad a_j, i \neq j$

Утверждение: $a_i > a_j$, при $i < j$.

Порядок: $a_i \times a_j$, при $i < j$

Четная или четное число инверсий, нечетная и нечетное

Th. 1 Число возможных перестановок из n чисел равно $n!$

Д-во: На месте a_1 может быть n чисел.
На месте a_2 - $n-1$. Итд. Тогда $n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$ ■

Th. 2 Каждая транспозиция меняет четность перестановки.

Д-во: 1) $\dots a_i, a_{i+1} \dots \rightarrow \dots a_{i+1}, a_i \dots$
Если a_i, a_{i+1} составили инверсию она пропадает, или появляется. ■

2) $\dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}, a_j \dots \rightarrow \dots, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}, a_i \dots$

Чтобы новую перестановку получить из старой a_i меняется $(k+1)$ раз с соседними числами, $a_j - k$.
Тогда общее число перестановок $\rightarrow$ ~~$2k+1$~~ изменится на $2k+1$ - нечетное число. ■

Th. 3 Все $n!$ перестановок могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отнялась от предыдущей на одну транспозицию, причем начать можно с любой перестановки.

Д-во:

По индукции:

1) $(1, 2), (2, 1); (2, 1), (1, 2)$ ✓

2) $\square$ верно для $n-1$ чисел. Тогда $\square$ первые перестановки:

$a_1, a_2, \dots, a_n$.

а) Сначала упорядочим все перестановки с a_1 . Их $(n-1)!$. По предположению индукции могут быть упорядочены.

б) $a_2 \begin{smallmatrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{smallmatrix} a_1; a_3 \begin{smallmatrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{smallmatrix} a_1$ итд. ■

Th. 4. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ - перестановка из первых n натуральных чисел, то после преобразования ее в натуральную перестановку индексами номера $1, 2, \dots, n$ образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s .

Д-во: Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n$ любые 2 числа a_i, a_j . Они образуют либо инверсию, либо поразок. После преобразования в натуральную a_i, a_j и i, j одновременно образуют либо инверсию, либо поразок $\Rightarrow$ число инверсий сохраняется $\blacksquare$

④ Определитель, св-ва определителя.

Опр. 1 Определителем $A \in R^{n \times n}$ называется сумма всех возможных произведений $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ n -чл. взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Если соотносим a_{ij} с (i, j) по разности номеров строк и столбцов, то $(-1)^{s(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ возрастает номеров строк.

$$|A| = \det A$$

св-ва определителя:

1° Опр. Треугольной n -чл. равен произв. диагональ-элементов.

$$|A| = (-1)^{s(1, 2, \dots, n)} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

2° Опр. Квадратной n -чл. не изменяется при транспонировании.

3° Если одна из строк / столбцов состоит из 0, то $\det A = 0$. n -чл. чинной из определителя.

4° При умножении строки (столбца) на число ее $\det A$ умножается на число.

из определителя.

5° Если каждый элемент некоторой строки можно представить в виде 2-х слагаемых, то:

$$a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}, \text{ то } \det A = \det B + \det C, \text{ где}$$

$$\begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ b_i' + c_i' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ b_i' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ c_i' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix}, \text{ где } b_i' = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$$

$$c_i' = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$$

из определителя $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni} =$
 $= a_{1i}, a_{2i}, \dots, b_{ni} + a_{1i}, a_{2i}, \dots, c_{ni} =$

6° При перестановке 2-х строк (столбцов) матрицы, определитель меняет знак

Д-во: $A = [a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n]$

$B = [a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n]$

Определители и-ух состоят из одних и тех же членов, если сравнить их знаки, они отличаются одной транспозицией. $\blacksquare$

7° Определитель и-ух, имеющей 2 одинаковые строки, равен 0.

Д-во: из 6° . поменяв местами одинаковые строки. Тогда $|A| = -|A| = 0$ $\blacksquare$

(строки)

8° Если 1 строка является линейной комбинацией других, то $\det A = 0$

из 7°

9° Если к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других, то $\det A$ не изменится.

Воскалывается из 5° и 8°

⑤ Определитель транспонированной м-цы. св. в 2° из ④.

$$|A| = |A^T|$$

Д-во: $|A|$ и $|A^T|$ состоят из одних и тех же членов. Знаки зависят от четности перестановки π . $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Определим его знак как $|A^T|$

$$a_1^t, a_2^t, \dots, a_n^t = a_{1^t}, a_{2^t}, \dots, a_{n^t}$$

Знак определяется четностью перестановки $\pi = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Эта перестановка совпадает с перестановкой инверсии номеров. Тогда $\varepsilon(a) = \varepsilon(\pi)$. $\square$

Значит строки и столбцы для $\det A$ равноправны.

⑥ Миноры и их алгебраические дополнения. Th. Laplace

$A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \min(m, n)$.
 Возьмем в A произвольные k строк и столбцов. Элементы находящиеся на пересечении строк и столбцов образуют м-цу k -го порядка. Определим этот м-цы как минор A в $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Оставшиеся те элементы образуют квадратную м-цу $(n-k)$ порядка. Определитель этой м-цы, взятый со знаком $(-1)^{\sum_{i=1}^k (i+j_i)} = (-1)^{p+q}$ — алг. дополнение.

Th. 1 (Th. Laplace).

$\exists A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$; $k \in N$, $1 \leq k \leq n-1$. $\exists B, A$
 where $\det A$ is the sum of products of elements of the k -th row by the elements of the k -th column of the matrix B .

D-60: Вспомогательная строка. Нужно доказать, что

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} M_{j_1, j_2, \dots, j_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n}$$

суммирование ведется по всевозможным знаменным слагаемым.

Минор представляет сумму произв. k строк и k столбцов A .
 Алг. доказательство - $n-k$. Вспомогательная сумма произв. $n-k$ строк.

$\exists S$ - сумма.

1) Покажем, что $M \cdot A$ представляет собой сумму элементов $\det A$ с теми же знаками.

M	A
-----	-----

а) В произвольном случае $M \cdot A$ есть сумма произв. $n-k$ строк A и k столбцов M . Все слагаемые находятся в $(-1)^{\sigma(a) + \sigma(b)} a_{ij} b_{ji}$, где $b_{ji} = b_{ji} + k$. Но $\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a) + \sigma(b')$, т.е. a и b' не образуют инверсии при этом $\sigma(b) = \sigma(b')$. Значит знак тот же.

б) Вспомогательная сумма можно свести к рассмотренному. Переставим k -ю строку на 1 место, т.е. на 2 и т.д. j -я строка на j стр. Будет $(j-k) + (j-k) + \dots + (j-k) = (j-k) \cdot k$. При этом снова образуется M и A .

2. Вся сумма S представляется собой некоторую сумму $\det A$ со своими знаками $\det A$

3. Показу, во б 3 бројот на новите дет А. Големин

[A-a, Aaa] Anan - nraaz- was
otgennno wnomnollon is - in copans.
An aa Ain An Ain Ono paunamono b
omoda? Ai... Ai... Togo Ain Ain ... Ain Ain - dumop.
{Aai, Aaa, Aas?, Aaan} / i Aai. Ain Ain } - a-z. Gouade.
dat A

и. Докажем, что канонич. раз. $\det A$
входит в сумму S 1 раз. Кан-во слагаемых в
 $S = n!$, множ. $k!$, ан-гон $-(n-k)!$. Их
произв. состоит из $C_n^k k! (n-k)! = n!$ 

① Разложения определителя по строке (столбцу)
Определитель произв. матриц.

Если в теореме Лапласа выбрать $h=1$ строку 1
столбца i то минорам A_{ij} соответствуют $a_{ij}(a_{ij})$
Тогда $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ ($\det A = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{ji}$). То

и есть разложение определителя по i -й строке (столбцу).
 Определитель n -го равен сумме всех произв-ий
 a_{1i} a_{2i} a_{3i} a_{4i} a_{5i} a_{6i} a_{7i} a_{8i} a_{9i} a_{10i} произвольной строки i на a_{ij}
 или дополнении.

Th. 1 Определитель произв. ^в матриц равен произведению определителей м-ч соотносителей D-во:

2] Let $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C =$

ρ - квазипериодическая м-ца. Тогда

A	O
-I	B

$|C| = |A| \cdot |B|$. Преобразую матрицу так, что A станет O .

$$C_1 = \left[\begin{array}{c|c} O & AB \\ \hline I & B \end{array} \right]$$

Определитель $C_2 = \det C$.

$$C_2 = \begin{vmatrix} AB & O \\ B & -I \end{vmatrix}, \text{ тогда } |C| = (-1)^n |C_2| = |AB| = |A| \cdot |B| \quad \blacksquare$$

Критерий обратимости.

③ Обратная м-ца.

Опр. 1. М-ца A^{-1} называется обратной к м-це A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. М-ца A для которой существует обратная, называется обратимой.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Th. 1 (о разложении определителя)

Сумма произведений эл-тов одной строки (столбца) м-цы на алг. дополнения к эл-там другой её строки (столбца) равна 0.

Д-во: Доказать, что $\forall i$ строки $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$. Рассмотрим вспомогательную м-цу B , в которой на месте j -строки находится i -строка м-цы A . $\det B = 0$ и $\det B = a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in}$. $\blacksquare$

Th. 2 (критерий обратимости)

М-ца обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.

Д-во: Необходимость. $\lceil A$ не обратима. Тогда $AA^{-1} = I$, $|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, значит $|A| \neq 0$.

Достаточность: $|A| \neq 0$, тогда, по $\frac{1}{|A|} \hat{A}$ обр.
 A^{-1} .

$$A \hat{A}^* = \hat{A} A = |A| I. \text{ Тогда } A \frac{1}{|A|} \hat{A} = I, \text{ т.е.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \hat{A} \quad \blacksquare$$

Th. 5.3. (о единственности обратной м-цы.)
 Если A - кв-я м-ца, $AB = I$, то $B = A^{-1}$.

Д-во: B - кв-я м-ца, A не вырождена. Тогда
 $\exists A^{-1}$. Тогда $A^{-1} = A^{-1}(AB) = I B = B$. Таким
 образом $B = A^{-1}$. $\blacksquare$

Св-ва обратной м-цы:

- 1) $I^{-1} = I$
- 2) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- 3) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- 5) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Th. 4 Произвольная невырожденная
 м-матрица единичной преобразования
 приводится к

Д-во: Превесу м-цу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь с помощью
 пом. строк аннулируем все
 эл-ты пом. столбца,
 получим верхнетреуголь-
 ную матрицу, и т.д. $\blacksquare$

⑨ Ранг м-мат. Теорема о базисном миноре

Опр. Ранг м-мат — максимальный порядок ненулевых миноров этого м-мат

$$\text{rg } A \leq \min(m, n)$$

$\text{rg } A = r > 0 \iff$ а) в м-мат $A \exists$ минор r -го порядка. б) любой минор более высокого порядка равен 0.

Th 1 (о базисном миноре)

Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка является линейной комбинацией базисных строк.

Д-во: $\exists A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rg } A > 0$.

Будем считать, что базисный минор нех-из в левом верхнем углу (M_r) . Тогда базисными будут первые r столбцов $a_1, \dots, a_r$

$\exists$ столбцы линейно зависимы. Тогда один из базисных столбцов будет линейной комбинацией других, и $M_r = 0$. ?!, M_r — базисный минор.

$\exists a_k$ — произвольный столбец м-мат A . Покажем, что он является линейной комбинацией столбцов $a_1, \dots, a_r$. $k > r$. Найдем числа $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, такие, что $a_k = \sum_{i=1}^r a_i a_{ik}$ или $a_{ik} = \sum_{i=1}^r a_i a_{ik}$, для этого составим

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

полученную таблицу — минора M_{r+1} -й строки и k -й столбца м-мат A .

$$|\Delta_i| = 0$$

Раскроем по посл. строке получим

$$0 = a_{k1} A_1 + a_{k2} A_2 + \dots + a_{kr} A_r - a_{kk} M_r, \text{ i.e. } a_{ik} = \sum_{j=1}^r a_{ij} a_{jk} \quad \square$$

⑩ Ранг $m \times n$ и линейная зависимость ее строк (и столбцов)

⑪ из ⑨ и еще:

Th. 1 Если r — Ранг $m \times n$ равен наименьшему числу ее линейно независимых строк (столбцов)

D-во. $\text{rg } A = r, r > 0$. Тогда в $m \times n$ r линейно независимых строк (столбцов) — ее базисные строки (столбцы) $\square$

Th. 2 Если все строки (столбцы) $m \times n$ A линейно выражаются через строки (столбцы) $m \times n$ B , то $\text{rg } A \leq \text{rg } B$.

D-во. $\text{rg } A = r, \text{rg } B = s, a_1, \dots, a_r$ — базисные строки A и B . $\text{rg } B = s$, тогда $a_1, \dots, a_r$ линейно выражаются через $b_1, \dots, b_s$, значит $a_1, \dots, a_r$ линейно зависима?!

Th. 3 Ранг $m \times n$

⑪ Ранг произведения $m \times n$. Инвариантность ранга относительно $ЭЛ$ -ных преобразований.

Th. 1 Ранг произведения $m \times n$ не превосходит ранга сомножителей.

D-во. $C = AB$. строки $m \times n$ C линейно выражаются через строки A , а столбцы через столбцы B . тогда $\text{rg } C \leq \text{rg } B, \text{rg } C \leq \text{rg } A$.

Th. 2 Ранг $m \times n$ не изменяется при умножении ее на невырожденную $m \times m$.

Д-во: $C = AP$, $|P| \neq 0$ Тогда $rg C \leq rg A$.

C другой стороны $rg A \leq rg C$. P обратима, т.е. $rg A = rg C$.

Th. 3 Элементарные преобразования м-м не изменяют её ранга.

Д-во: следует из Th неотраженности м-м элементарных преобразований

Th. 4 Ранг м-м не изменится, если из системы строк (столбцов) вычеркнуть или присоединить строку (столбец), которая является линейной комбинацией других строк (столбцов).

Д-во: Вычеркнем строку. Возьмем из нее ту линейную комбинацию, которую она представляет. Получим нулевую строку, ранг останется прежним.

⑫ Эквивалентные м-м. Критерий эквивалентности.

Def 1 Два м-м $A, B \in R^{m \times n}$ называются эквивалентными, если $\exists P, Q : A = PBQ, A \sim B$

Th. 1 Эквивалентность м-м является отношением эквивалентности на м-м $R^{m \times n}$

Д-во: $A = I_{m \times m} A I_{n \times n}$, $\forall A \in R; A = PBQ$, то $B = P^{-1} A Q^{-1}$
или $A = P B Q, B = P_2 C Q_2$, то $A = P P_2 C Q_2 Q_1 = P C Q$.

Th. 2 Любая ненулевая м-м $A \in R^{m \times n}$ ранга r эквивалентна $I_r \in R^{m \times n}$ вида

$$I_r = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right]$$

Д-во: А приводится к верхней ступенчатой форме Приведу к диагональной м-мат. Ровно r элементов А отличны от 0. Разделив каждую из строк на ее диагональный элемент получу I_n $\square$

Th. 3 М-мат $A, B \in R^{m \times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.

Д-во: Т.к. Ранги м-мат не меняются при умножении на невырожденную м-мат, то необходима эквивалентность. Достаточность вытекает из Th. 2.

⑬ Системы линейных алгебраических уравнений квадратной невырожденной м-мат. Правило Крамера.

Th. 1 СЛАУ с квадратной невырожденной м-мат совместна и имеет единственное решение.

Д-во: Т.к. А невырождена, $\exists A^{-1}$. Вектор $x = A^{-1}b$ является решением системы $Ax = b$. Это решение единственно, т.к. если y - другое р-е системы, то $Ax \equiv Ay$, т.е. $x = y$ $\square$

Опр. 1 (Правило Крамера)

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \hat{A} b, \text{ т.е.}$$

$$x_i = \frac{A_{i1}b_1 + A_{i2}b_2 + \dots + A_{in}b_n}{\Delta}$$

$$x_i = |A_i| / |A|, \quad i = \overline{1, n}$$

тогда систему (xx) можно записать

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (xxx)$$

Придавая $x_{r+1}, \dots, x_n$ произвольные значения $c_{r+1}, \dots, c_n$ получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{1n}c_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{rn}c_n \end{cases} \quad (xxx)$$

(xxx) является квадратной невырожденной м-цей. Значит имеет единственное решение $c_1, \dots, c_r$. Значит $c_1, \dots, c_n$ абс. решением системы

Th. 2 Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вводя главные значения из системы (xxx) , можно получить все решения (xx)

Д-во: $\exists c_1, \dots, c_n$ - произв. решение (xx) . $c_{r+1}, \dots, c_n$ - произвольные значения. $c_1, \dots, c_r$ вводятся из (xxx) . Значит (xxx) имеет единственное решение, то в качестве значений можно получить только $c_1, \dots, c_n$.

Общее решение системы.

Решить систему - это описать мн-во их решений. Если система определена, нужно найти единственное решение. Иначе мн-во. Для этого нужно решить систему (xxx) относительно главных неизвестных.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad (24)$$

определяющая ф-я. (2) описывает мн-во всех решений $x = (c_1, \dots, c_n)$, где c_i - известные значения.

общее решение системы (xx) называется $x = (c_1, \dots, c_n)$, где c_i - известные значения.

14) Критерий совместности и определенности

Th. 1 (Кронекера - Капелли) $\forall$

СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен рангу основной матрицы.

(если $Ax = b$, $B = [A|b]$ - совместная)

Д-во: Необходимость: $\exists Ax = b$ - совместна.

Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in R: b = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$.
Следовательно b - линейная комбинация $a_1, \dots, a_n$
и-что A . Значит $rg A = rg B$.

Достаточность: $\exists rg A = rg B = r$. Тогда возьмем в A базисный минор. Т.е. $rg B = r$, то он не будет в миноре и-что B . Тогда посл. столбец и-что B будет линейной комбинацией базисных столбцов, т.е. столбцов и-что A . $\Rightarrow$ столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов и-что A . $\square$

Th. 2 (критерий единственности решения)

СЛАУ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$, когда ранг и-что системы равен рангу ее расширенной и-что и равен числу переменных, т.е. $r(A) = r(A|b) = n$

Д-во. Доказывается (следует из) теоремы о приравнивании неизвестных произв. значений.

$\exists c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_n$ - произв. решение системы. Возьмем числа $c_{n+1}, \dots, c_n$ в качестве значений для свободных неизвестных $x_{n+1}, \dots, x_n$ и будем брать значения главных неизвестных $x_1, \dots, x_n$ системы. Т.е. $(c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_n)$ - решение системы.

15) Исследование и решение СЛАУ общего вида.
Их решение.

система $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$

совместна и $\text{rg } A = \text{rg } B = r$. Будем считать, что базисный минор находится в левом верхнем углу, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим упрощенную систему из первых r уравнений системы $(*)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (**)$$

Тл. 1 Упрощенная система эквивалентна исходной: $(*) \sim (**)$

Д-во. Обе системы имеют одинаковое число неизвестных. Очевидно, что любое решение (x) является решением $(**)$. Докажем обратное. В расширенной матрице B системы $(*)$ первые r строк являются базисными. Значит все уравнения $(**)$ и строки будут линейной комбинацией первых r уравнений. Значит верно. $\blacksquare$

Исследуем систему $(**)$:

Если $r = n$, то $(**)$ имеет единственное решение. Т.к. система с невырожденной кв. матрицей.

16) Эквивалентность СЛАУ. Элементарные преобразования систем.

Опр 1 Две СЛАУ с одинаковым числом неизвестных называются эквивалентными, если мн-ва их решений совпадают.

Th. 1 Умножение обеих частей системы $Ax = b$ на ненулевую м-цу приводит к эквивалентной системе.

Д-во: $\exists Q \in R^{m \times m}, |Q| \neq 0.$

$Ax = b; QA x = QB$. Если x - решение 1-ой то $Ax = b$, значит $QA x = QB$ - решение 2-ой системы. Если $QA x = QB$, то $1 \cdot Q^{-1} \cdot QA x = 1 \cdot Q^{-1} \cdot QB$ и $Ax = b$. $\square$

Элементарные преобразования систем уравнений

- 1) перестановка местами 2-х ур-й системы.
- 2) умножение к-и уравнения на $\lambda \neq 0$
- 3) прибавление к одному ур-ю другого, умноженного на β

Th. 2 Элементарные преобразования СЛАУ приводят к эквивалентной системе.

Д-во: Элементарные преобразования систем означают такие преобразования строки расширенной м-цы B , которые равносильны умножению слева на м-цы преобразований. Это эквивалентно умножению обеих частей уравнения слева на ненулевую м-цу, что приводит к эквивалентной системе. $\square$

17) Метод Гаусса исследования и решения СЛАУ.

Метод Гаусса исследования и решения СЛАУ состоит в приведении ее к системе с верхней трапециевидной m -цей с последующим исследованием и решением полученной системы.

Система с верхней трапециевидной m -цей:

$$Ax = b \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_n \end{array} \right] \quad (*)$$

Th. 1 Система $Ax = b$ с верхней трапециевидной m -цей совместна $\Leftrightarrow$ когда $b_k = 0$ при $\forall k > r$

Д-во: Ранг трапециевидной m -цы равен числу ненулевых строк, т.е. минор r -го порядка $\neq 0$ отнесен от нуля, а ранг все миноры $r+1, \dots, n$. Ранг содержит нулевую строку. Ранг (*) равен r тогда и только тогда, когда $b_k = 0$; $k = r+1, n$. Значит по Th. Кронекера-Капелли доказано $\square$

Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной m -цей.

m -ца общего вида эквивалентна преобразованиями приводится к верхней трапециевидной форме, значит и СЛАУ так же.

(18)

Линейное пространство. Арифметическое пространство

Непустое мн-во V называется векторным линейным пространством, если на нем заданы 2 закона композиции.

- 1) $\forall a, b \in V \quad a + b \in V$ (внутренний закон)
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, a \in V \quad \lambda a \in V$ (внешний закон)

аксиомы:

- внутренняя

- 1) $a + b = b + a, \forall a, b \in V$
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in V$
- 3) $\exists \theta \in V: a + \theta = a, \forall a \in V$
- 4) $\forall a \in V \exists (-a) \in V: a + (-a) = \theta$

- внешняя

- 5) $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$
- 6) $(\lambda \beta) a = \lambda (\beta a) \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall a \in V$

~~для~~

- для обеих

- 7) $(\lambda + \beta) a = \lambda a + \beta a, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$
- 8) $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V$

Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.
 $\mathbb{R}^n$ - мн-во всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых арифметическими векторами.

$$a = (a_1, \dots, a_n); \quad a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

Св-ва линейных пространств.

1° в линейном пространстве $\exists!$ θ , т.е. если $\exists \theta_1, \theta_2$, то $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.

2° $\forall$ вектора линейного пр-ва $\exists!$ противоположный вектор a , тогда
 $b = b + (\theta + a) = (b + \theta) + a = a$; $b = -a$.

3° В линейном п-ве $0a = \theta \quad \forall a \in V, a\theta = \theta, \forall a \in \mathbb{R}$

Докажем, что $b + 0a = b$

$$b + 0a = (b, \theta) + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + (1, 0)a = b + (-a) + a = b \quad \square$$

$$b + \theta = \theta b \quad \text{также,} \quad \square$$

4° В линейном пространстве из п-ва $\lambda a = \theta$, следует, что либо $\lambda = 0$ либо $\theta a = \theta$

$$a = 1a = \left(\frac{1}{\lambda} \lambda\right)a = \frac{1}{\lambda}(\lambda a) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta \quad \text{или} \quad \lambda = 0.$$

5° В линейном п-ве противоположный к вектору может быть получен $-a = (-1)a$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1)a = 0a = \theta \quad \square$$

$$6^\circ \forall a, b \in V \exists! b - a$$

Докажем: $a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \theta + b = b$
 $b + (-a) = b - a \quad \square$

19) Линейная зависимость в линейном п-ве.

Опр. 1 Линейная комбинация называется тривиальной, если все ее коэфф. равны 0, и не тривиальной, если обратное.

Опр. 2 Система векторов $a_1, \dots, a_k$ называется линейно зависимой, если $\exists$ линейная не тривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. $\exists a_1, \dots, a_k \neq \theta$: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$
 И линейно независимой, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Th 1 Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

D-во: Линейная зависимость системы из одного вектора равносильна тому, что $\lambda a = 0$ при $\lambda \neq 0$, значит $a = 0$.

Th 2 Система векторов $a_1, \dots, a_k$, где $k > 1$ л/з $\Leftrightarrow$ когда хотя бы 1 из векторов этой системы линейно выражается через другие.

D-во: Необходимость: Если $a_1, \dots, a_k$ линейно зависима, то $\exists$ числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k : \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 \neq 0 : \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

$\exists a_i \neq 0$. Тогда $a_i = \sum_{s \neq i} (-\lambda_s / \lambda_i) a_s$. Т.к. $k > 1$, то для $a_i \exists$ хотя бы 1 другой вектор системы.

Достаточность: $\exists a_i = \sum_{s \neq i} \lambda_s a_s$ Тогда получим:
 $-a_i \lambda_i a_i - \dots - \lambda_{i-1} a_{i-1} + 1 a_i - \lambda_{i+1} a_{i+1} - \dots - \lambda_k a_k = 0$

Th 3 Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

D-во: $\exists$ первые s векторов $a_1, \dots, a_s, \dots, a_k$ линейно зависима. Тогда можно представить систему $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s + 0 a_{s+1} + \dots + 0 a_k = 0$

Th 4 Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

D-во: Если бы $\exists$ линейно зависящая подсистема, то по Th 3 вся система была бы линейно зависящей.

Th 5 Система векторов $a_1, \dots, a_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор b представляется единственным образом в виде линейной комбинации этих векторов.

Д-во: Необходимость: $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$; $\exists \lambda_i \neq \lambda'_i$.

Вспомогательное утверждение: Если вектор b можно представить двумя различными линейными комбинациями векторов $a_1, \dots, a_n$, то эти векторы линейно зависимы.

Достаточность: Пусть $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы. Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ при $\lambda_i \neq 0$. Тогда $0 a_1 + \dots + 0 a_n = 0$. Невозможно. $\square$

Th 6 Если система векторов $a_1, \dots, a_n$ линейно независима, а система $a_1, \dots, a_n, b$ линейно зависима, то b линейно выражается через $a_1, \dots, a_n$.

Д-во: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_0 b = 0$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_0$ среди которых $\exists \lambda_i \neq 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы, что не может быть по условию. Значит $b = \sum_{i=1}^n (-\lambda_i / \lambda_0) a_i$. $\square$

20) Базис и размерность линейного пространства.

Опр 1 Базисом линейного пространства называется упорядоченная м.л.н. система векторов пространства, через которую выражается любой вектор пространства.

Th 1 Система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства является его базисом $\Leftrightarrow$ когда она образует максимальную м.л.н. систему векторов этого пространства.

Д-во: Необходимость: Базис пространства является максимальной л/н системой векторов в этом пр-ве, т.е. любая бо́льшая система векторов линейно сворачивается через этот базис, а значит линейно зависима.

Достаточность: $\{e_1, \dots, e_n\}$ - максимальная л/н система векторов пространства V , тогда для любого $x \in V$ система векторов $e_1, \dots, e_n, x$ л/з, так как содержит более n векторов. Следовательно, вектор x является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_n$. Следовательно $e_1, \dots, e_n$ образуют базис V .

Th. 2 Разложение вектора по базису единственно

Д-во: Вытекает из 19.5

Th. 2.3 Если $e_1, \dots, e_n$ - базис, то $\forall x$:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$x_e = [x_1 \dots x_n]^T$ - координатный столбец x .

Th. 3 При сложении векторов их координаты в одном базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число

Д-во: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ Тогда

$$x+y = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i) e_i; \quad \alpha x = \sum_{i=1}^n \alpha x_i e_i \quad \blacksquare$$

② Переход к другому базису. Матрица перехода.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$; $f = (f_1, \dots, f_n)$ - базисы n -мерного пр. во. V .

$$f_i = c_{i1}e_1 + c_{i2}e_2 + \dots + c_{in}e_n$$

$$f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n$$

$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица перехода от базиса e к базису f .

Th. 1 Матрица перехода к другому базису не вырождена.

Д-во $|C| \neq 0$. Тогда один из столбцов m -го является линейной комбинацией других, ~~то~~ это противоречит линейной независимости элементов $f_1, \dots, f_n$ ■

Th. 2 Если C - м-ца перехода $e \rightarrow f$, то C - м-ца перехода $f \rightarrow e$.

Д-во: $If = eC$ Тогда $e = fC^{-1}$ ■

Th. 3 Координаты вектора x в базисах e и f связаны соотношением $x_e = Cx_f$, где C - м-ца перехода $e \rightarrow f$

Д-во: $x = e x_e$
 $f = e C$

$$x_e = x = f x_f = (e C) x_f = e (C x_f)$$

Значит $x_e = e x_e = e C x_f$; $x_e = C x_f$ ■

22) Линейное подпространство и линейное аффинное многообразие в линейном пр-ве. Определения и простейшие свойства.

Опр. 1 Непустое подмн-во L пр-ва V называется линейным подпространством пр-ва V , если оно является линейным пространством относительно законов композиции, действующих на V .

Th. 1 Непустое подмножество L пр-ва V является линейным подпр-вом этого пр-ва $\Leftrightarrow$ когда имеют место импликации:

$$\begin{aligned} a, b \in L &\rightarrow a + b \in L \\ \alpha \in L, \lambda \in \mathbb{R} &\rightarrow \lambda a \in L \end{aligned}$$

Д-во: Необходимость очевидна.

Достаточность: Нужно проверить, ~~определены~~ выполнены ли операции всеми аксиомами линейного пр-ва. Если $a \in L$, тогда $0a = \Theta$, $(-1)a = -a \Rightarrow \Theta \in L, -a \in L$.

Опр. 2

$[V]$ - линейное пр-во, L - линейное подпр-во, x_0 - некоторый вектор V . Мн-во H векторов вида $x_0 + x$ где $x \in L$ называется линейным (аффинным) многообразием пр-ва V , полученным сдвигом подпр-ва L на вектор x_0 . x_0 - вектор сдвига, L - направляющее подпр-во многообразия H .

Лемма:

1° Вектор сдвига принадлежит линейному многообразию. т.к. $x_0 = x_0 + \Theta$, $\Theta \in L$.

2° Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпр-ву. т.к. если $z_1 = x_0 + x$, $x \in L$, $z_2 = x_0 + y$, $y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

Th. 2 Если 2 линейных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают, то $x_1 - x_2 \in L_1$ и $x_1 - x_2 \in L_2$.

Доказательство: Необходимость. Пусть $H_1 = H_2$, тогда для произвольного x имеем $x \in H_1$ и $x \in H_2$. Тогда $x = x_1 + l_1$ и $x = x_2 + l_2$. Аналогично $x_1 - x_2 = l_2 - l_1$, значит $x_1 - x_2 \in L_2$. Аналогично $x_2 - x_1 \in L_1$, значит $L_2 \subset L_1$, значит $L_1 = L_2$.

Достаточность: Пусть $L_1 = L_2 = L$, $x_1 - x_2 \in L$. Тогда для $\forall z \in H_1$, $z = x_1 + x$, где $x \in L$ или $x_2 = x_1 + (x_1 - x_2) + x$, $(x_1 - x_2) + x \in L$, значит $z \in H_2$. Аналогично $H_2 \subset H_1$, значит $H_1 = H_2$.

23) Геометрические св-ва решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

Th. 1 Множество всех решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными является линейным подпространством арифметического пр-ва R^n .

Доказательство: Пусть $L = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$. Если $x \in L$, $y \in L$, то $x + y \in L$, и если $\lambda \in R$, то $\lambda x \in L$. Значит L — линейное подпространство пр-ва R^n .

Th. 2 Размерность пр-ва решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными равна $n - r$, где $r = \text{rg} A$.

Доказательство: Построим ФЕР. Для этого воспользуемся аппарата свободных неизвестных. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — главные неизвестные. Тогда $x_{r+1}, \dots, x_n$ имеют следующие $n - r$ наборов решений: $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$.

→

$$e_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0)^T$$

$$e_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0)^T$$

$$e_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \dots, c_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1)^T$$

Решения $e_1, \dots, e_{n-r}$ имеют следующие св-ва:

1. Решения $e_1, \dots, e_{n-r}$ линейно независимы, т.к. матрица C

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \dots & c_{n-r,r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

имеет ранг, равный $n-r$ (ибо содержит минор $(n-r) \times (n-r)$ по диагонали, отличный от нуля), а ранг $n-r$ ~~составляет~~ равен максимальному числу линейно независимых строк.

2. Любое решение $x = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)^T$ является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_{n-r}$, и более того:

$$x = x_{r+1} e_1 + \dots + x_n e_{n-r} \quad (x)$$

$$y = x - x_{r+1} e_1 - \dots - x_n e_{n-r} \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T$$

Очевидно, что y - решение системы. $y = 0$ значит $e_1, \dots, e_{n-r}$ - ФСР.

Полученные ФСР называются каноническими.

24. Теорема
Общее решение св-ва решений неоднородной СЛАУ

$\exists Ax = b$ - неоднородная СЛАУ. Тогда $Ax = 0$
называется приведенной однородной СЛАУ для $Ax = b$.

1° Сумма решений неоднородной и ~~любого~~
приведенной однородной является решением неоднородной системы.

2° Разность 2х решений неоднородной системы является решением приведенной однородной.

Тл 1 Мн-во всех решений неоднородной системы является линейным многообразием, порожденным ~~сдвигом~~ подпространством решений приведенной одн. системы на частное решение неоднородной системы.

Дво: $\exists H$ - мн-во всех решений $Ax = b$, c - частное решение, L - мн-во всех решений приведенной системы $Ax = 0$. Покажу, что $H = c + L$.
Если $z \in H$, то $z = c + (z - c) = c + x$, где $x = z - c$.
 $x \in L$, значит $z \in c + L$, т.е. $H \subset c + L$. $\square$

Общее решение неоднородной системы.

Найдя 1 решение неоднородной системы и прибавляя его к какому-либо решению приведенной системы можно получить все решения неодн. системы. Можно записать так.

$z = c + L, e_1 + \dots + L_n + e_n, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
 z - общее решение неоднородной системы при $\mathbb{R}^n$

Вопросы по элементарной математике

1. Определения.

1) Геометрические места точек плоскости (пр-ва) - фигуры, состоящие из всех точек, удовлетворяющих опр. св-вам.

2) Подобие треугольников - подобные Δ - Δ у которых углы равны а стороны соответственно пропорциональны сторонам друг друга.

3) Касательная к окружности - прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

4) Скрещивающиеся прямые - прямые, которые не лежат в одной плоскости.

5) Касающиеся окружности - 2 $\odot$ касаются, если имеют ровно 1 общую точку.

6) Окружность, вписанная в треугольник - $\odot$, касающаяся всех сторон треугольника.

7) Окружность, описанная около четырехугольника - Окружность, касающаяся всех вершин четырехугольника.

8) Перпендикулярность прямой и плоскости - прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей на этой плоскости и проходящей через точку пересечения.

9) Перпендикулярность двух плоскостей - если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, она тоже ей перпендикулярна.

10) Наклонная и плоскости и её проекция -
 Наклонная - любой (или прямой) отрезок, соединяющий ~~двух~~ точку произвольную плоскости, не лежащую на этой плоскости, перпендикуляром плоскости.
 Проекция - отрезок, соединяющий конец перпендикуляра наклонной, лежащие на плоскости.

2. Формулировка утверждений.

2.1 Теоремы.

1) Теорема синусов - стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \rightarrow \text{диаметр описанной окружности.}$$

2) Теорема косинусов - $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$

3) Теорема о точке пересечения медиан Δ - 3 медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая из них делится этой точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.

4) Теорема о точке пересечения биссектрис Δ - биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

5) Теорема о биссектрисе угла как о геометрическом месте точек на плоскости - Биссектриса угла есть геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от сторон угла.

6) Теорема о серединном перпендикуляре как о геометрическом месте точек плоскости - серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка.

7) Теорема о свойствах диагоналей и сторон параллелограмма - сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

8) Теорема о величине вписанного угла. - вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, и равен половине дуги, на которую он опирается.

9) Теорема об условии, при котором в четырехугольнике можно вписать окружность - в четырехугольнике можно вписать окружность $\Leftrightarrow$ когда он выпуклый и сумма его противоположных сторон равна.

10) Теорема об условии, при котором около четырехугольника можно описать окружность - $\Leftrightarrow$ когда сумма противоположных углов равна 180°

11) Теорема о двух медианах равнобедренного Δ - В равнобедренном Δ две медианы равны.

12) Теорема о трех перпендикулярах - если прямая, проведенная из плоскости через основание наклонной перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.

13) Признак перпендикулярности прямой и плоскости - если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

2.2. Окружности.

1) Треугольник ABC - равносторонний.

Δ не равносторонний, если $AB \neq AC; BC \neq AC;$
 $AB \neq BC$

2) $\nexists \Delta ABC$ - р/б.

Δ не равнобедренной, если у него нет одинаковых сторон.

3) Отрезки a, b, c образуют Δ .

a, b, c не образуют Δ , если $\max(a, b, c) \geq a + b + c$
 ~~$\max(a, b, c) \geq a + b$ или $\max(a, b, c) \geq b + c$~~

$$\max(a, b, c) = a; \quad a > b + c$$

4) Четырехугольник с диагоналями d_1, d_2 является параллелограммом

Если d_1, d_2 точкой пересечения не делятся пополам, то четырехугольник не параллелограмм.

5) В четырехугольнике можно вписать окружность.

Если $AB + CD = BC + AD$, то нельзя.

6) Отрезки $a_1, \dots, a_n$ имеют одинаковую длину

если $a_1 \neq a_2$ или $a_1 \neq a_3 \dots$ или $a_1 \neq a_n$, то неправда.

7) Прямая l параллельна плоскости α

Если l не ~~пересекает~~ α и α имеют общую точку

8) Прямые l_1 и l_2 в пространстве - скрещивающиеся.
Если l_1 и l_2 лежат в одной плоскости.

9) Прямые l_1 и l_2 в пространстве параллельны.

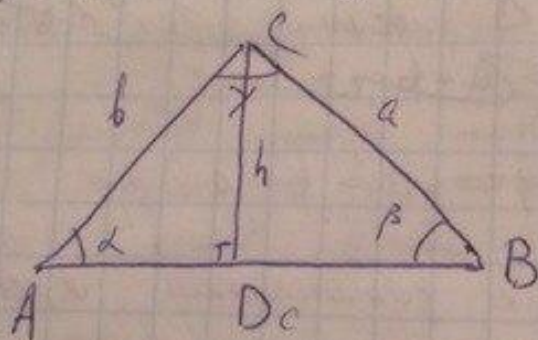
Если l_1 и l_2 не лежат в одной плоскости
или если l_1 и l_2 пересекаются.

Док-во утверждений:

3.1

1) Теорема косинусов.

AD =



$$AD = b \cos \alpha$$

$$DB = c - b \cos \alpha$$

$$h^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2$$

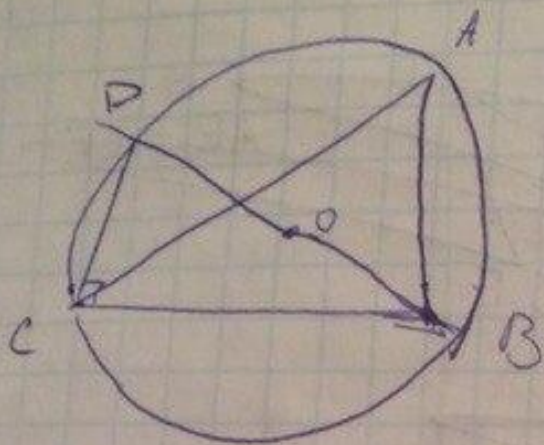
$$h^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2$$

$$b^2 - (b \cos \alpha)^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Случай, когда один из углов тупой аналогичен.

2) Теорема синусов



$$BD = 2R$$

$$\angle DCB = 90^\circ$$

$$\angle DCB = \angle \text{ или } \pi - \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$$

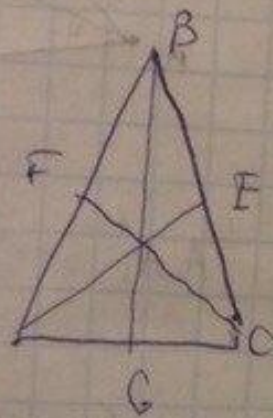
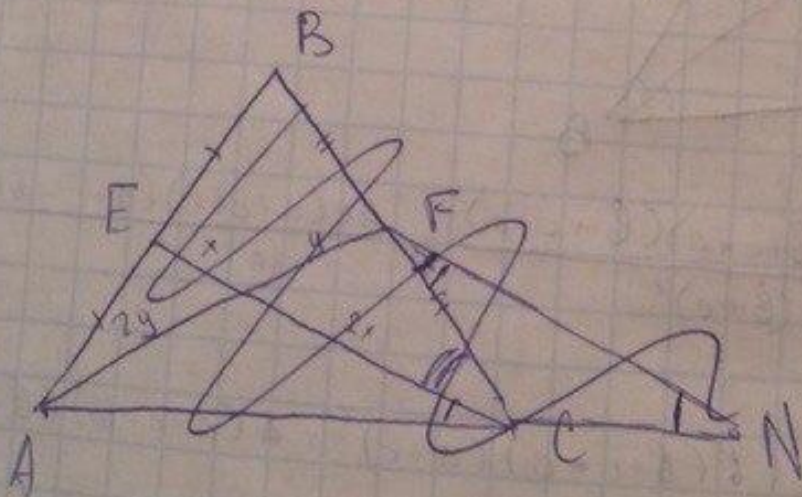
$$\text{Значит } a = 2R \sin \alpha$$

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Провода аналогичное рассуждение получим, что

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

3) Если в Δ 2 медианы равны, то он р/б



$$\angle ACE = \angle A'NE$$

$$AB = A'B$$

$$\triangle AEC \sim \triangle A'FC, \text{ т.к.}$$

$$\text{Значит } AB = BC.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BGC, \text{ т.к.}$$

$$AB = GC, BC = BG$$

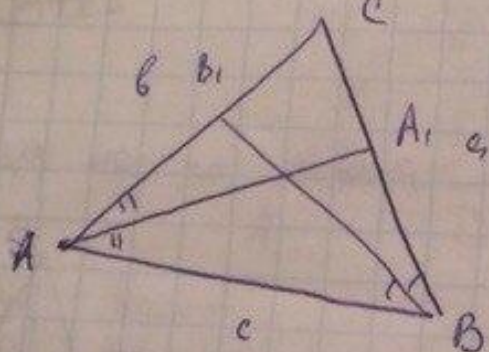
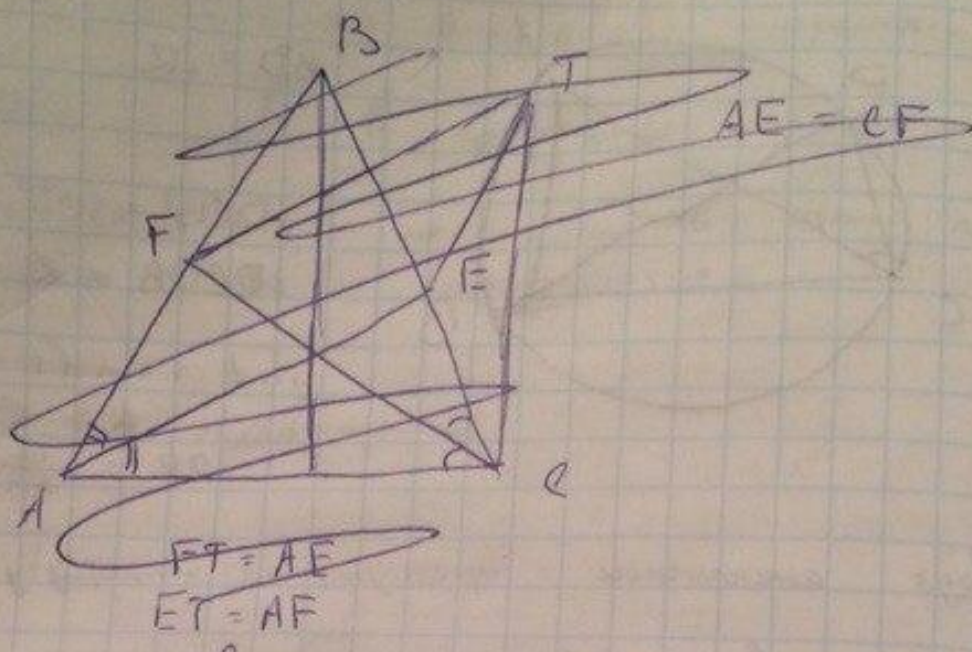
$$\angle ACB = \angle BGC = 90^\circ$$

$$1) AC \perp BG$$

$$2) CA = CB$$

$$3) CF \perp BE$$

④ Если в Δ где описаны окружности, то Δ PE



$$AA_1^2 = \frac{bc(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2} = \frac{ac(a+c+b)(a+c-b)}{(a+c)^2} = BB_1^2$$

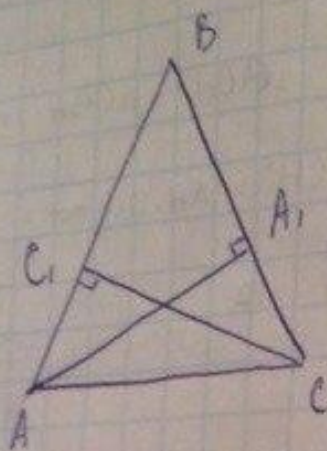
$$\begin{aligned} & c(a+b+c)(b(b+c+a)(a+c)^2 - a(a+c-b)(b+c)^2) = 0 \\ & \cancel{a^2bc} + a^2bc - a^3b + 2ab^2c + 2ab^2c - 2a^2bc + b^2c^2 + bc^3 - \\ & - \cancel{ab^2c} - \cancel{a^2bc} - 2ab^2c - 2a^2bc - a^2c^2 - ab^2c - ac^3 + ab^3 + \\ & + 2ab^2c + \cancel{ab^2c} = 0 \end{aligned}$$

$$(b-a)(c^3 + 3abc + ab(a+b) + c^2(a+b)) = 0$$

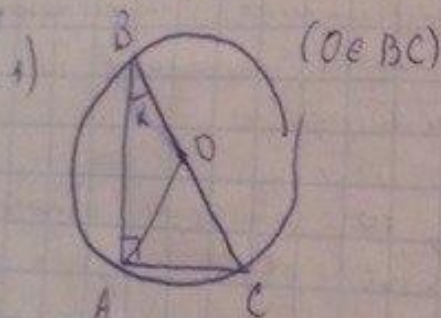
> 0 ; $b-a=0$

⑤ Если в $\triangle$ 2 высоты равны, то он р/б.

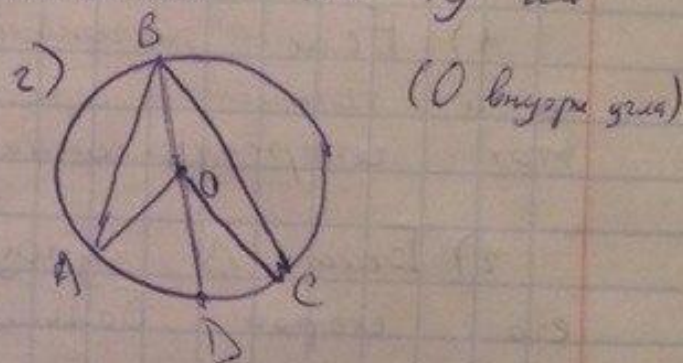
$\triangle AA_1C = \triangle CC_1A$ по 3 сторонам $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle C = \angle A, \triangle ABC - \text{р/б}$



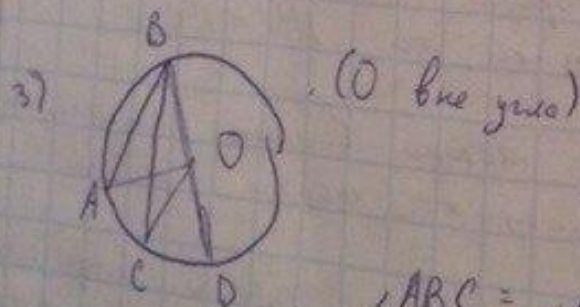
⑥ Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу



$$\angle AOC = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$

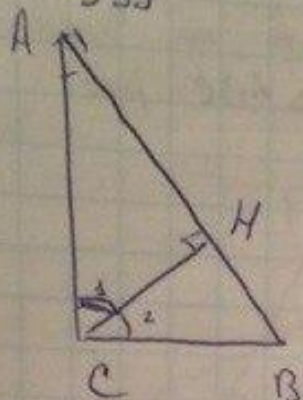


$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle OOC = \frac{1}{2} \angle AOC$$



$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \angle AOD - \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \angle AOC$$

⑦ Высота прямоугольного Δ , проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое проекции катетов на гипотенузу



$$\angle 1 = \angle B, \angle 2 = \angle A \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle CBH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow CH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{AH \cdot BH} \quad \square$$

32. Формулировка утверждений.

1) Если диагонали четырехугольника пересекаются, то и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

2) Если Δ тупоугольный, то квадрат одной из его сторон больше ^{суммы} квадратов двух других сторон.

3) Если MN соединяет стороны AB и AC Δ и является его средней линией, то $MN = BC/2$.

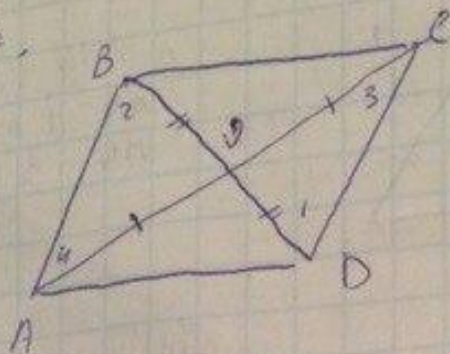
4) Если в четырехугольнике можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

5) Если суммы противоположных углов четырехугольника равны, то около него можно описать окружность.

6) Если медиана, проведенная к одной из сторон прямоугольного Δ равно его половине, то Δ прямоугольный.

3.3 D. 6c.

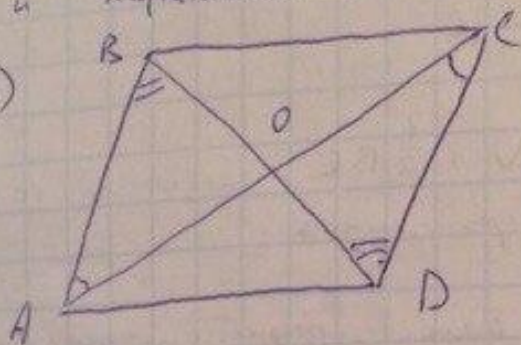
① 1)



$AO = OC$, $BO = OD$, $\angle AOB = \angle COD$, значит
Т.ч. стороны AB и CD

$AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB \parallel CD$
и параллельны, $ABCD$ - параллелограмм.

2)



$\triangle ABO = \triangle CDO$, значит $AB = CD$, $AD = BC$.
 $\triangle BCO = \triangle DAO$, значит $BO = DO$

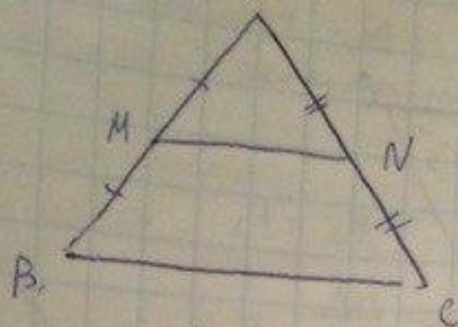
3) Чтобы четырехугольник был параллелограммом,
необходимо и достаточно, чтобы его диагонали
пересекались пополам.

4) Диагонали четырехугольника делятся пополам
тогда и только тогда, когда
 $ABCD$ - параллелограмм

② 1) 2) В $\triangle ABC$ - большая сторона Δ . В прямоугол.
Против большей стороны лежит больший
угол. если a, b - const и увеличить c , угол
увеличится. Значит Δ тупоугольный. И наоборот

3) Если $c^2 < a^2 + b^2$ тогда Δ тупоуг.

4) Для того, чтобы Δ был тупоугольным, необходимо
и достаточно, чтобы $c^2 > a^2 + b^2$

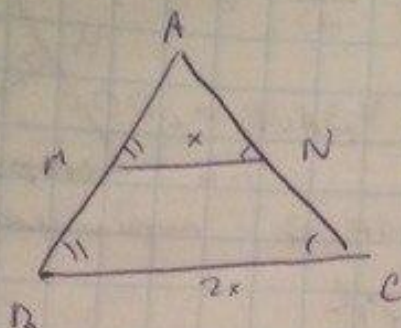


$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$AM = \frac{1}{2} AB$$

$$MN = \frac{1}{2} BC$$

2)



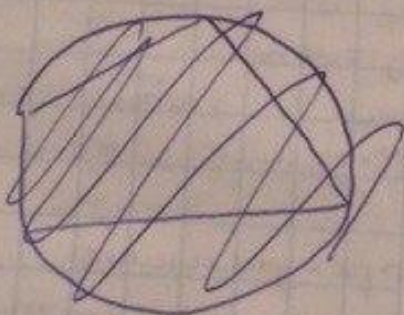
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

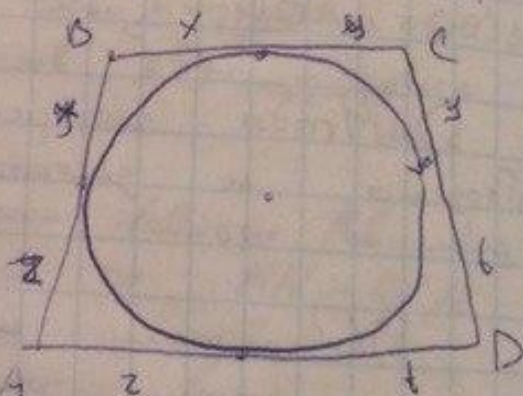
3) а) Число $MN = \frac{1}{2} BC$ тогда и только тогда, когда MN - ср. линия.

б) Число MN была средней линией необходимо и достаточно, тогда $MN = \frac{1}{2} BC$, $MN \parallel BC$.

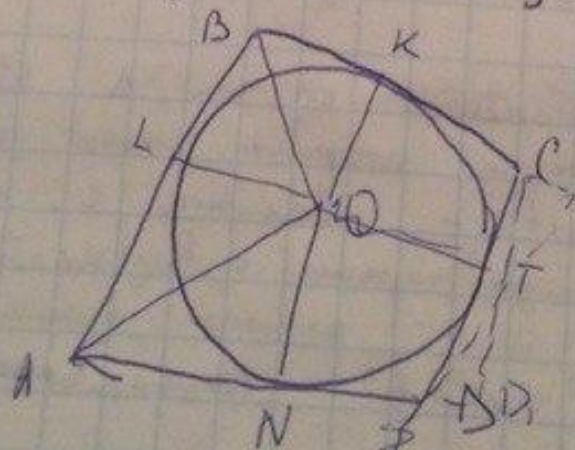
4) 1)



$$x + y + z + t = x + z + y + t$$



2)



$$AB + CD = BC + AD$$

$$BO \perp AO = O$$

$$OK = ON, OL$$

$\angle CD$ перпендикуляр ω . Тогда $\angle CD$, $OT \perp CD$, CD и ω - AI

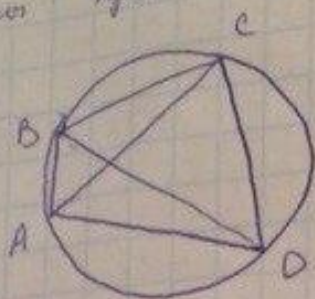
$$AB + CD = BC + AD$$

$$CD - CD = AD - AD, CD = CD + AD$$

3) а) Чтобы было вписано и описано, стороны $\angle B$ должны быть равны.

б) В $\square$ можно вписать $\circ$ тогда и только тогда, когда углы противоположных сторон равны.

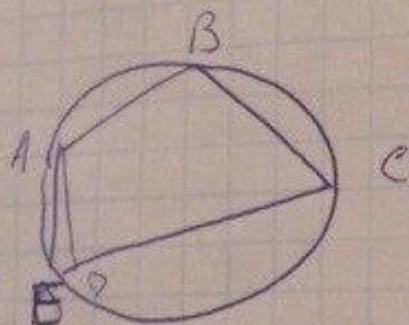
в) 1)



$\angle ABC$ - вписанный на AC
 $\angle ADC$ - вписанный на AC
 $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$
 $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$

$$\frac{1}{2} (\angle AOC + \angle AOC) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

2)

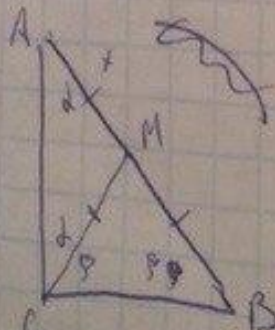


$\angle AEC = \angle ADC$
 $\angle AEC = \angle ADC$
 $\angle AEC = \angle ADC$

3) а) Определим окружность, вписанную в $\square$ и описанную к $\square$. Тогда $\angle ADC + \angle ABC = \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$

б) Чтобы $\angle ADC + \angle ABC = \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ необходимо и достаточно, чтобы $\square$ был вписанным в $\circ$.

в) 1)

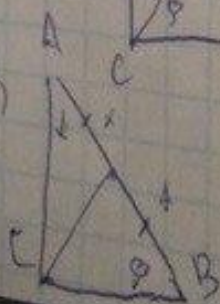


$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle C = 90^\circ$$

2)



$$AC^2 + x^2 - 2AC \cdot x \cdot \cos \alpha =$$

$$BC^2 + x^2 - 2BC \cdot x \cdot \sin \alpha$$

$$AC^2 + BC^2 = 4x^2$$

$$6x^2$$

3) а) $\triangle ABC$ для того, чтобы $\triangle ABC$ был прямоугольным необходимо и достаточно, чтобы медиана была равна половине гипотенузы.

б) если медиана равна половине гипотенузы, то $\triangle ABC$ и обратно, тогда $\triangle ABC$ прямоугольный. $\square$

